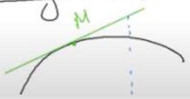
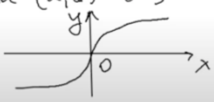
Опр. 1 Пусть f дифференцируема на (a,b). Говорят, что график ф-ции f имеет на (a,b) выпуклость, направленную вверх (вниз), если $\forall c\in(a,b)$: график f на интервале (a,b) лежит не выше (не ниже) касательной, проведенной в точке $M(c,f(c))$.

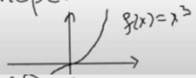


Опр. 1 Пусть f диф-ма на (a,b); $c\in(a,b)$. c – точка перегиба f, если $\exists\delta>0$, т.ч. $B_\delta(c)\subset(a,b)$, т.ч. f имеет разные напр-я выпуклости на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$.

Замеч-е: На практике допускают, что f диф-ма на $(a,b)\setminus\{c\}$ и непр. в т. c. Например, $f(x)=\sqrt[3]{x}$



Примеры: $f(x)=\operatorname{tg}x$, $f(x)=x^3$
$x=0$ – т. перегиба



Т.1 (необходимое усл-е перегиба) Пусть f диф-ма на (a,b), $c\in(a,b)$, и пусть $\exists f''(c)$. Если c – точка перегиба, то $f''(c)=0$.

Д-во: Заметим, что $\varphi'(x)=f'(x)-f'(c)\Rightarrow\varphi'(c)=0$; $\varphi''(x)=f''(x)\Rightarrow\varphi''(c)=f''(c)$.
Предположим, что $f''(c)>0$ (<0). Тогда $\varphi''(c)>0$ (<0), $\varphi'(c)=0\Rightarrow c$ – точка строгого лок. минимума (макс.) ф-ции $\varphi(x)$. Но $\varphi(x)$ монотонна в точке c ?!
$\Rightarrow f''(c)=0$. ч.т.д.

Т.4 (3-е дост. усл-е перегиба). Пусть f n раз диф-ма в окр-ти т. c, n – чётное, и пусть $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f''(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)\neq0$, то c – точка перегиба.

Д-во: при $n=2$ уже док-но в т.3. Пусть $n\geq4$.

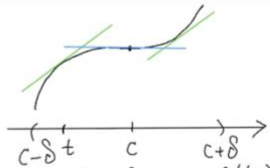
Заметим, что $f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)\neq0\Rightarrow\exists\delta>0$, т.ч. $f^{(n)}(x)$ имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$.
Пусть $x\in\mathring{B}_\delta(c)$. Тогда

$$f''(x)=\underbrace{f''(c)+\frac{f'''(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3}}_{=0}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}\underbrace{(x-c)^{n-2}}_{>0\text{, т.к. } n-2 \text{ – чётное}},\quad \xi \text{ – между } c \text{ и } x.$$

Значит, f'' имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$ $\Rightarrow c$ – т. перегиба (т.2). ч.т.д.

Т.5 Пусть f дважды диф-ма на (a,b). Если $f''(x)\geq0$ (≤0) $\forall x\in(a,b)$, то f выпукла вниз (вверх) на (a,b).

Д-во: Пусть $c\in(a,b)$. Ур-е касат-й в т. c:
$y=f'(c)\cdot(x-c)+f(c)$. С др. стороны,
$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, ξ – между x и c
$\Rightarrow y-f(x)=-\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, $(x-c)^2\geq0$
Если, например, $f''(x)>0$ (<0) на (a,b), то $y\leq f(x)$ $(\geq)$ $\Rightarrow$ $\smile$ $(\frown)$ ч.т.



Введем вспомогательную ф-цию:
$\varphi(x)=f(x)-f'(c)(x-c)-f(c)$
Очевидно, что $\varphi(c)=0$.

Лемма. Если c – точка перегиба f, и $f'(x)$ непрерывна в точке c, то ф-ция $\varphi(x)$ монотонна в точке c.

Д-во: Пусть f $\frown$ на $(c-\delta;c)$ и $\smile$ на $(c;c+\delta)$. Пусть $t\in(c-\delta;c)$. Тогда $\forall x\in(c-\delta;c)$: $f(x)\leq f'(t)(x-t)+f(t)\xrightarrow[t\to c-0]{}f'(c)(x-c)+f(c)\Rightarrow\varphi(x)\leq0$ $\forall x\in(c-\delta;c)$
Аналогично $\varphi(x)\geq0$ $\forall x\in(c;c+\delta)$ $\Rightarrow\varphi$ не убывает в т. c ч.т.д.

Т.2 (1-е дост-е условие перегиба). Пусть f дважды диф-ма в проколотой окр-ти точки c и $\exists f'(c)$. Если $\exists\delta>0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)$, то c – т. перегиба.

Д-во: f'' имеет разные знаки $\Rightarrow f$ имеет различные напр-я выпуклости на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)\Rightarrow c$ – т. перегиба. ч.т.д.

Т.3 (2-е дост. усл-е перегиба) Пусть f дважды диф-ма в $B_\delta(c)$, и пусть $\exists f'''(c)$. Если $f''(c)=0$, $f'''(c)\neq0$, то c – точка перегиба.

Д-во: Если $f'''(c)\neq0$, то f'' строго монотонна в точке c. Поскольку $f''(c)=0$, то $\exists\delta>0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c-\delta;c)$ и $(c;c+\delta)\Rightarrow c$ – т. перегиба (т.2). ч.т.д.